

Τα Μαθηματικά της Αρχαίας Αλεξανδρείας

Ως γνωστόν, η αρχαία βιβλιοθήκη της Αλεξανδρείας ήταν μέρος αυτού που ονομαζόταν Μουσείο. Όμως αυτό δεν ήταν μουσείο με την σημερινή έννοια, αλλά πανεπιστήμιο, το πρώτο πανεπιστήμιο στην ιστορία. Ένας από τους πρώτους καθηγητές εκεί ήταν ο Ευκλείδης, ο πατέρας της μαθηματικής παραδόσεως. Το κύριο έργο του Ευκλείδη, τα Στοιχεία, είναι το πρώτο μεγάλο μνημείο στην ιστορία της μαθηματικής σκέψεως και η επιδραση του στην μετεπειτα επιστήμη είναι τεραστία.

Θα προσπαθήσω να εξηγήσω γιατί. Αρχίζω λοιπόν με ένα εντελώς στοιχειώδες αλλά και θεμελιώδες παραδειγμα : την αποδείξη του Ευκλείδη ότι το σύνολο των πρώτων αριθμών είναι άπειρο. Στα επόμενα με αριθμός εννοώ έναν θετικό ακέραιο. Ας θυμηθούμε ότι πρώτοι ονομάζονται οι αριθμοί οι οποίοι είναι διαιρέτοι μόνο από τον εαυτό τους και τη μονάδα. Οι πρώτοι αποτελούν τους οικοδομικούς λίθους στο βασίλειο των αριθμών, γιατί όλοι οι άλλοι αριθμοί είναι συνθετοί, εφόσον παραγοντάς περνώντας γινόμενα πρώτων. Ακόμα και η πιο επιπολαιά μελέτη αποκαλύπτει ότι οι πρώτοι αραιώνουν όπως προχωρούμε σε ολοένα μεγαλύτερους αριθμούς. Εγείρεται λοιπόν το ερώτημα : σταματούν κάπου; δηλαδή υπάρχει κάποιος τελευταίος πρώτος, και όλοι οι αριθμοί που τον ακολουθούν είναι συνθετοί; ο Ευκλείδης ήταν ο πρώτος που έκανε αυτό το ερώτημα και ο πρώτος που το απάντησε και κατά έναν τελείο τρόπο.

Κανενας ηλεκτρονικος υπολογιστης δεν θα μπορουσε να απαντησει στο ερωτημα, εφ'οσον ειναι ερωτημα που αφορα το απειρο. Μονο ο νους μπορουσε. Εδω ειναι λοιπον η αποδειξη του Ευκλειδη. Ας υποθεσουμε οτι τουναντιον, το συνολο των πρωτων αριθμων ειναι πεπερασμενο, επομενως μπορουμε να τους απαριθμησουμε κατα αυξουσα ταξη, παραλειποντας την μοναδα :

$$p_1, p_2, \dots, p_n$$

Ας εξετασουμε τοτε τον αριθμο

$$M = \Pi + 1$$

οπου Π ειναι το γινομενο :

$$\Pi = p_1 p_2 \cdots p_n$$

Εφ'οσον ο M ειναι μεγαλυτερος απο τον τελευταιο πρωτο, τον p_n , πρεπει να ειναι συνθετος αριθμος. Επομενως ο M εχει καποιον πρωτο παραγοντα ας πουμε τον q . Αρα ο q ειναι ενας απο τους $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Ομως, εαν $q = p_k$ για καποιο $k = 1, \dots, n$, τοτε εφοσον ο q διαιρει τον M και επισης προφανως διαιρει το γινομενο Π , κατ αναγκην διαιρει την διαφορα τους, δηλαδη την μοναδα. Τουτο ομως ειναι ατοπο. Γιατι κανεις αριθμος, εκτος απο την ιδια την μοναδα, δεν διαιρει την μοναδα, και εχουμε παραλειψει την μοναδα στην παραπανω απαριθμηση.

Επομενως το αντιθετο της αρχικης μας υποθεσεως πρεπει να ισχυει, δηλαδη το συνολο των πρωτων αριθμων πρεπει να ειναι απειρο.

Όσο απλη αν φαίνεται αυτή η αποδείξη, θεωρηται ακόμα ως μια απο τις κομψότερες σε όλα τα μαθηματικά. Ας σκεφθούμε τις επαναστασεις στην ιστορία της σκεψews που περιεχονται σε αυτό το απλο κομματι μαθηματικων. Πρωτον, ότι ο νους μπορεί να θέσει ένα ερωτημα που αφορά το απειρο. Δευτερον, ότι ο νους μπορεί να δώσει την απαντηση κατά έναν καθοριστικο και μη αμφισβητησιμο τροπο. Τριτον, ότι η αληθεια βρισκεται δειχνοντας ότι η αντιθετη υποθεση οδηγει σε ατοπο. Όλες οι μεγάλες αποδειξεις στα μαθηματικά απο την εποχη του Ευκλειδη μεχρι σημερα έχουν χρησιμοποιησει την Ευκλειδια μεθοδο της εις ατοπον απαγωγης.

Τα Στοιχεία του Ευκλείδη απαρτίζονται από 13 βιβλία. Το πιο προχωρημένο μέρος των Στοιχείων είναι το 5ο βιβλίο. Αρχαίοι σχολιαστές μας πληροφορούν ότι η θεωρία που αναπτύσσεται σε αυτό το βιβλίο, η θεωρία των αναλογιών, όπως ονομαζόταν, ήταν ανακάλυψη του Ευδόξου, μαθηματικού συγχρόνου με τον Αριστοτέλη. Ο ίδιος ο Ευκλείδης ίσως υπηρξε μαθητής του. Όλα τα συγγράμματα του, όπως και όλων των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών προ του Ευκλείδη έχουν χαθεί. Παρόλα αυτά το έργο του διασωθηκε μέσω του Ευκλείδη.

Η θεωρία των αναλογιών ήταν η θεωρία των συνεχών μεγεθών, όπως μήκη, εμβαδά, όγκοι, χρονικά διαστήματα, βάρη, κλπ. Επομένως έχουμε να κάνουμε με μια θεωρία άκρας γενικότητας, θεμελιωδέστατη.

Για να καταλάβουμε πια ήταν η βασική δυσκολία που αντιμετώπισε ο Ευδοξος, πρέπει να πάμε πίσω στους 6ο και 5ο π.Χ. αιώνες, εποχή η οποία στο πλαίσιο των αρχαίων Ελληνικών μαθηματικών αποτελεί προιστορία εφόσον μόνο μύθοι έχουν μείνει από εκείνη την εποχή. Τον 6ο π.Χ. αιώνα έχουμε την μυθική μορφή του Πυθαγόρα, ο οποίος διακηρυττε ότι το παν αριθμός. Στην περίπτωση πιο συγκεκριμένων πραγμάτων όπως συνεχή μεγέθη αυτό σημαίνει ότι η σχέση μεταξύ δύο ομοειδών μεγεθών μπορεί να εκφραστεί ως ο λόγος δύο θετικών ακέραιων αριθμών. Εάν μας δοθούν, ας πούμε, δύο οποιαδήποτε μήκη a και a' , μπορούμε να βρούμε ένα καταλληλώς μικρό μήκος u τέτοιο ώστε το a και το a' να είναι ακέραια πολλαπλασια του u , δηλαδή να υπάρχουν θετικοί ακέραιοι m και m' έτσι ώστε :

$$a = mu \quad \text{και} \quad a' = m'u$$

Λεγουμε τοτε οτι τα a και a' ειναι συμμετρα μεγεθη, και το u , το οποιο δρα ως μοναδα, ειναι το κοινο τους μετρο. Η σχεση του a προς το a' ειναι τοτε εκεινη του m προς το m' , δηλαδη εκεινη που οριζει τον ρητο αριθμο

$$\frac{m}{m'}$$

Ομως κατα τον 5ο π.Χ. αιωνα η φιλοσοφια των Πυθαγορειων, των οπαδων του Πυθαγορα, υπεστη ενα καταστροφικο πληγμα οταν ενας απο αυτους, ο Ιππασος, εφτασε σε ατοπο προσπαθοντας να βρει κοινο μετρο για την πλευρα και την διαγωνιο ενος τετραγωνου η ενος κανονικου πενταγωνου.

Δημιουργήθηκε τότε κρίση που έφερε τα μαθηματικά σχεδόν σε τέλμα. Οι αποδείξεις των περισσότερων βασικών θεωρημάτων της γεωμετρίας, ακόμα και εκείνου που αφορά τα όμοια τρίγωνα, και πάνω στο οποίο βασιζόταν, κατά πάσα πιθανότητα, η αρχική απόδειξη του περιφήμου Πυθαγορείου θεωρήματος, χρησιμοποιούσαν την ψευδή υποθεση ότι όλα τα ζεύγη ομοειδών μεγεθών είναι συμμετρα.

Η κρίση ξεπεράστηκε μόνο όταν ο Ευδοξος ανέκαλυψε την θεωρία του των αναλογιών. Ο Ευδοξος έκανε ένα μεγάλο αφαιρετικό άλμα όταν συνειδητοποίησε ότι είναι μάταιο να προσπαθεί κανείς να δώσει έναν άμεσο ορισμό της έννοιας του συνεχούς μεγέθους.

Αντιθετα, πρεπει να προχωρησουμε εμμεσα εισαγοντας τα αιτηματα οτι ενα μεγεθος μπορει να πολλαπλασιασται με εναν θετικο ακεραιο δινοντας ενα αλλο ομοειδες μεγεθος, και οτι δυο ομοειδη μεγεθη μπορουν να συγκριθουν. Ουτε πρεπει κανεις να προσπαθει να ορισει αμεσα τι εννοουμε με αναλογια δυο ομοειδων μεγεθων, παρα μονο να ορισει τι εννοουμε με ισοτητα δυο αναλογιων, δηλαδη τι εννοουμε οταν λεμε οτι η αναλογια του a προς το a' ειναι ιση προς την αναλογια του b προς το b' , οπου a και a' ομοειδη μεγεθη, επι παραδειγματι μηκη, και επισης b και b' ομοειδη μεγεθη, επι παραδειγματι χρονικα διαστηματα, αλλα οχι κατ αναγκη του ιδιου ειδους οπως τα μεγεθη του πρωτου ζευγους.

Η ιδέα του Ευδοξου ήταν λοιπόν η ακόλουθη. Ας εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση που μπορούσαν να χειριστούν προηγουμένως, δηλαδή την περίπτωση όπου τα a και a' είναι συμμετρα. Τότε υπάρχουν θετικοί ακέραιοι m και m' έτσι ώστε

$$m'a = ma'$$

Ομοίως, εάν τα b και b' είναι συμμετρα υπάρχουν θετικοί ακέραιοι n και n' έτσι ώστε

$$n'b = nb'$$

Τότε η ισοτιμία της αναλογίας του a προς το a' με εκείνη του b προς το b' εκφράζεται απλά με την ισοτιμία δύο ρητών αριθμών :

$$\frac{m}{m'} = \frac{n}{n'}$$

As εξετάσουμε τώρα την γενική περίπτωση όπου κανένα από τα δυο ζευγη δεν συνιστάται κατ αναγκη από συμμετρα μεγεθη. Οποιοδηποτε ζευγος (m, m') θετικων ακεραιων αν παρουμε, είτε εχουμε $m'a \leq ma'$ είτε εχουμε $m'a \geq ma'$, και η περιπτωση της ισοτητας δεν θα συμβει ποτε αν τα μεγεθη a, a' ειναι ασυμμετρα. Εδω ειναι λοιπον ο ορισμος του Ευδοξου, ο περιφημος 5ος ορισμος του 5ου βιβλιου των Στοιχειων του Ευκλειδη :

Εαν τα a, a' είναι ομοειδη μεγεθη, και τα b, b' είναι επισης ομοειδη μεγεθη, λεγουμε οτι η αναλογια του a προς το a' είναι ιση με την αναλογια του b προς το b' , εαν για καθε ζευγος (m, m') θετικων ακεραιων, εχουμε $m'a \leq ma'$ τοτε και μονον τοτε οταν $m'b \leq mb'$, και εχουμε $m'a \geq ma'$ τοτε και μονον τοτε οταν $m'b \geq mb'$.

Σε ολη την ιστορια των μαθηματικων δεν υπαρχει πουθενα μεγαλυτερο αλμα αφαιρεσεως. Πραγματι, το περιεχομενο του 5ου βιβλιου δεν εγινε πληρως αντιληπτο παρα μονον απο το 2ο ημισυ του 19ου μ.Χ. αιωνα, οταν εμφανιστηκε το εργο του Γερμανου μαθηματικου Dedekind. As σημειωσουμε οτι συμφωνα με τον ορισμο του Ευδοξου καθε ζευγος ομοειδων μεγεθων διαιρει το συνολο των ζευγων (m, m') θετικων ακεραιων σε δυο υποσυνολα N_1, N_2 συμφωνα με το εαν ισχυει $m'a \leq ma'$, η ισχυει $m'a \geq ma'$. Τα δυο υποσυνολα εχουν κοινα στοιχεια τοτε και μονον τοτε οταν τα μεγεθη a, a' ειναι συμμετρα.

Είναι ευκολο να δει κανεις οτι αυτη η διαιρεση στην πραγματικοτητα αντιστοιχει σε διαιρεση του συνολου των ρητων αριθμων σε δυο υποσυνολα Q_1, Q_2 , οπου το Q_1 και το Q_2 περιεχει τους ρητους της μορφης

$$\frac{m}{m'}$$

οπου το ζευγος (m, m') προερχεται απο το υποσυνολο N_1 και το υποσυνολο N_2 , αντιστοιχως. Εαν το q_1 είναι στοιχειο του Q_1 και το q_2 στοιχειο του Q_2 , παντοτε εχουμε $q_1 \geq q_2$ και τα δυο υποσυνολα εχουν ενα κοινο στοιχειο εαν και μονον εαν τα a, a' είναι συμμετρα.

Ο Dedekind λοιπον, ακολουθοντας τον πιο πανω ορισμο του 5ου Ευκλειδιου βιβλιου, ταυτισε την αναλογια, τον πραγματικο αριθμο, για να χρησιμοποιησουμε την συγχρονη ορολογια, με μια τετοια διαιρεση του συνολου των ρητων αριθμων. Και ο ορισμος αυτος του Dedekind αποτελει το σημειο εκκινησης της συγχρονης αναλυσης. Για αυτον τον λογο, παρολον οτι τα συγραμματα του εχουν ολα χαθει, ο Ευδοξος συγκαταλεγεται μεταξυ των μεγαλυτερων μαθηματικων της ιστοριας.

Ερχομαι τωρα στην πιο σημαντικη συμβολη του ιδιου του Ευκλειδη, αυτο που εκτοτε ειναι παγκοσμιως γνωστο ως Ευκλειδια Γεωμετρια. Για να ειμαστε σε θεση να εκτιμησουμε σωστα την σημασια αυτης της συμβολης, πρεπει να ανατρεξουμε στις αρχες του ανθρωπινου πολιτισμου που ελαβαν χωραν στην Αιγυπτο και ταυτοχρονα στην Μεσοποταμια. Σε αυτους τους αρχαιοτατους πολιτισμους, αρχης γενομενης κατα την διαρκεια της 3ης π.Χ. χιλιετιας, ευρεθηκαν εμπειρικοι κανονες οι οποιοι εδιναν λυσεις σε γεωμετρικα προβληματα που προεκυπταν στην ζωη. Στην Αιγυπτο, οι επαναλαμβανομενες πλημμυρες του Νειλου εσβηγαν τα συνορα μεταξυ των αγροκτηματων και επισης μειωναν το εμβαδον μερικων κτηματων αυξανοντας το εμβαδον αλλων.

Μετα απο καθε πλημμυρα, οι τοπογραφοι του Φαραω επρεπε να ξαναχαραξουν τα συνορα και επισης να ξαναυπολογισουν το εμβαδον του καθε κτηματος με τον σκοπο να υπολογισουν σωστα τον οφειλομενο φορο. Αυτο ηταν, συμφωνα με τις αρχαιες μαρτυριες, το αρχικο κινητρο για την ευρεση εμπειρικων κανονων στην γεωμετρια του επιπεδου. Απο την αλλη μερια εκεινοι που εκτισαν τις πυραμιδες ειχαν να αντιμετωπισουν την μεγαλυτερη προκληση των προβληματων της στερεομετριας. Το πιο εντυπωσιακο κατορθωμα αυτης της εμπειρικης περιόδου της γεωμετριας, περιεχεται σε ενα παπυρο που φυλασσεται στο Αιγυπτιακο Μουσείο της Μοσχας. Δινει τον σωστο κανονα για τον ογκο μιας ορθης πυραμιδας με τετραγωνη βαση, παρομοιας λοιπον με τις Μεγαλες Πυραμιδες, μεσω του υψους και του μηκους της καθε πλευρας της βασεως.

Οι αρχαιοι Ελληνες, οταν ηρθαν στο προσκήνιο της ιστορίας κατά την 1η π.Χ. χιλιετία, ανέπτυξαν στενές σχέσεις με την Αιγυπτο. Έτσι ο πολυ αρχαιότερος πολιτισμος της Φαραωνικής Αιγυπτου επεδράσε στον σχηματισμο του αρχαιου Ελληνικου πολιτισμου, και ο Ελληνικος πολιτισμος έγινε ο κληρονομος του Αιγυπτιακου. Αντιθετα, τετοιες σχέσεις δεν ανέπτυχθηκαν με την Μεσοποταμία, όχι μόνο λόγω της μεγαλύτερης γεωγραφικής αποστάσης, αλλά επίσης γιατί ο πολιτισμος της Μεσοποταμίας, αντιθετα απο εκείνον της Αιγυπτου, είχε υποστεί αλλεπαλληλες καταστροφες. Λέγεται ότι ο Πυθαγορας έμεινε περισσότερο απο 20 χρονια στην Αιγυπτο, σπουδάζοντας. Οταν τελικά επεστρεψε στην Ελλάδα έφερε μαζί του τους θησαυρους της Αιγυπτιακής εμπειρικής γεωμετρίας. Όπως ήδη ανέφερα, η πρώτη αυτη περιδος των αρχαιων Ελληνικων μαθηματικων τυλιγεται στην αχλη του μυθου.

Παρολα ταυτα ειναι βεβαιο οτι αυτος και οι μαθητες του αρχισαν βαθμιαια να ανακαλυπτουν λογικες συνδεσεις μεταξυ των διαφορων εμπειρικων δεδομενων. Επι παραδειγματι, το Πυθαγορειο θεωρημα βρεθηκε οτι ηταν λογικη συνεπεια των δεδομενων που αφορουν τα ομοια τριγωνα. Το δεδομενο οτι το αθροισμα των γωνιων ενος τριγωνου ειναι ισο με δυο ορθες βρεθηκε οτι ηταν λογικη συνεπεια των ιδιοτητων των παραλληλων γραμμων. Ωσπου σε καποιο σημειο στον 4ο π. αιωνα ηρθε η μεγαλεπιβολη ιδεα οτι ολη η γεωμετρια ισως απορρεει απο λιγες βασικες αρχες. Αλλα, που να ξεκινησει κανεις, πως να ψαξει για αυτες τις βασικες αρχες; Αυτο πρεπει να ηταν ενα προβλημα ασυγκριτης δυσκολιας.

Και τούτο γιατί η γεωμετρία ήταν αντιληπτή και μέσω των αισθήσεων και όχι μόνο μέσω του νου. Και ήταν σχεδόν αδύνατον να μην υποπέσει κανείς στο σφάλμα του να παραδεχθεί αθέλα του, δίχως να το εισαγεί ρητά ως υποθεση, κάτι εντελώς προφανές στο μάτι. Έτσι, κάτι που φαινόταν να είναι λογική συνέπεια των βασικών αρχών ήταν στην πραγματικότητα αποτέλεσμα μη συνειδητών προσθετών υποθέσεων. Ο Αριστοτέλης, ο ιδρυτής της συστηματικής λογικής, έδειξε στο έργο του Αναλυτικά Προτερα ότι η θεωρία των παραλληλών της εποχής του περιείχε έναν τέτοιο φανλο κύκλο.

Αυτός λοιπόν είναι ο λόγος για τον οποίο ήταν ένα πραγματικά τρομακτικό επίτευγμα όταν ο Ευκλείδης τελικά κατορθωσε να βρει πέντε αιτήματα από τα οποία όλη η γεωμετρία του επιπέδου μπορούσε να εξαχθεί με καθαρά λογικές διαδικασίες. Ιδιαίτερα εντυπωσιακό είναι το γεγονός ότι αντιληφθηκε ότι οι αντιρρήσεις του Αριστοτέλη μπορούσαν να υπερκεραστούν μόνο με την εισαγωγή του 5ου αιτήματος. Τα άλλα τέσσερα αιτήματα του είναι απλές προτάσεις. Το 1ο αίτημα, επί παραδείγματι λέει ότι για κάθε ζεύγος σημείων υπάρχει ένα και μοναδικό ευθυγραμμο τμήμα με άκρα τα δοθέντα σημεία. Όμως το 5ο αίτημα δεν είναι τόσο απλό. Εδώ είναι, στην αρχική του διατύπωση :

Εαν μια ευθεια γραμμη που προσπιπτει σε δυο αλλες ευθειες γραμμες κανει το αθροισμα των εσωτερικων γωνιων απο την ιδια πλευρα μικροτερο απο δυο ορθες, τοτε οι δυο ευθειες γραμμες, προεκτεινομενες επ αοριστον, θα συναντηθουν απο εκεινη την πλευρα απ οπου κεινται οι προαναφερθησες γωνιες.

[Figure1]

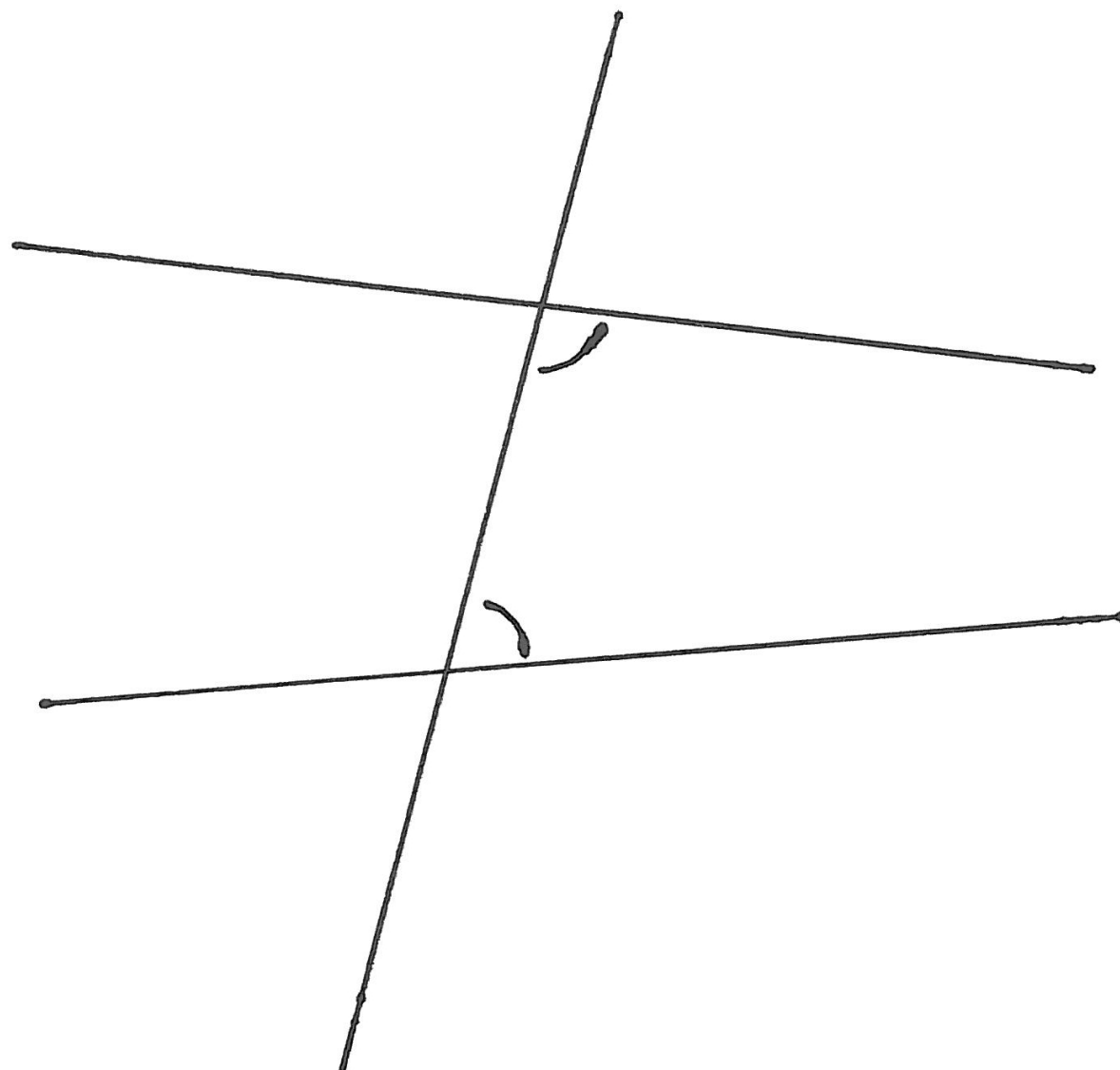


Figure 1

Αυτο είναι το πιο διασημό αίτημα στην ιστορία των μαθηματικών. Για δύο χιλιετίες μια μακρά σειρά ικανοτατών μαθηματικών πίστευαν ότι ο τρόπος που εξεργαστήκε το θέμα ο Ευκλείδης ήταν ελαττωματικός και προσπαθούσαν να δείξουν ότι το 5ο αίτημα είναι λογική συνέπεια των άλλων τεσσάρων αιτημάτων. Τελικά, κατά το 1ο ημισυ του 19ου μ.Χ. αιώνα, ο Ευκλείδης δικαιώθηκε όταν ανακαλυφθηκε ότι εγκαταλείποντας το 5ο αίτημα οδηγούμαστε σε μια νέα γεωμετρία. Αυτή η ανακάλυψη της μη – Ευκλείδιας γεωμετρίας αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα σημεία καμπής στην ιστορία των μαθηματικών.

Συνοψίζοντας, ο Ευκλείδης, ορθονοντας το οικοδομημα της γεωμετρίας πάνω σε μια αξιωματική βάση, έδωσε το πρώτο παραδειγμα της υποθετικό – αποδεικτικής μεθόδου. Όλες οι μεγάλες θεωρίες στις ακριβείς επιστήμες που αναπτύχθηκαν εκτότε ακολουθήσαν το παραδειγμα του.

[Images]



Αυτες είναι εικονες της μπροστινης και της πισω οψης του Μεταλλειου Fields. Καθε τεσσερα χρονια λαμβανει χωραν το Διεθνες Κογκρεσσο των Μαθηματικων, καθε φορα σε διαφορετικη πολη ανα τον κοσμο. Στην εναρκτηρια τελετη του Κογκρεσσου, βραβευονται με το Μεταλλειο Fields μεταξυ δυο και τεσσερεις μαθηματικοι, κατω των 40 ετων, οι οποιοι εχουν κανει την πιο σημαντικη συμβολη στα μαθηματικα. Παρολον τον περιορισμο της ηλικιας, το Μεταλλειο Fields χαιρει παρομοιας εκτιμησεως μεταξυ των μαθηματικων με εκεινην του Βραβειου Νομπελ μεταξυ των φυσικων. Και τουτο γιατι ενω το Βραβειο Νομπελ αποφασιζεται απο την Σουηδικη Ακαδημια και απονεμεται απο τον Βασιλεα της Σουηδιας, το Μεταλλειο Fields αποφασιζεται απο την Διεθνη Μαθηματικη Ενωση και απονεμεται απο τον Αρχηγο Κρατους

η Πρωτο Πολιτη της χωρας οπου λαμβανει χωραν το Κογκρεσσο, παρουσια περιπου 10 χιλιαδων μαθηματικων απο ολον τον κοσμο.

Η μπροστινη οψη του Μεταλλειου Fields εικονιζει τον κορυφαιο των μαθηματικων, τον Αρχιμηδη, το ονομα του στα Ελληνικα επιγραφεται στην δεξια πλευρα. Ο ανθρωπος αυτος ηταν καποτε μαθητης στο Μουσείο της Αλεξανδρειας και ακουγε προσεκτικα τα μαθηματα του δασκαλου του, του Ευκλειδη. Η επιγραφή στα Λατινικα σημαινει :

Ξεπερασε τον εαυτο σου και συνελαβε τον κοσμο

Η πίσω οψη του Μεταλλείου Fields εικονίζει το διαγραμμα που ο ιδιος ειχε ζητησει να τοποθετηθει στον ταφο του, μια σφαιρα ευγεγραμμενη σε εναν κυλινδρο. Θα εξηγησω αυτο παρακατω.

Η επιγραφη στα Λατινικα σημαινει :

Απονεμεται σε μαθηματικους επιλεγμενους απο ολον τον κοσμο για τα εξαιρετικα τους συνγραμματα

Ο Αρχιμήδης περάσε την νεότητά του στην Αλεξανδρεία. Εκεί εκάνε τις πρώτες του μεγάλες μαθηματικές ανακαλύψεις. Εκεί επίσης αρχισε η δια βίου φιλία του με τον Κουωνα ο οποίος αργότερα έγινε Βασιλικός Αστρονόμος της Αιγύπτου. Μετά την επιστροφή του στην μητρική του πόλη, τις Συρακούσες, εξακολούθησε να κρατά στενές σχέσεις με τους διανοητές της Αλεξανδρείας, μέχρι το τέλος της ζωής του. Εκείνον τον καιρό αν ήσουν μαθηματικός και ήθελες το έργο σου να διαβαστεί από άλλους το έστελνες στην Βιβλιοθήκη της Αλεξανδρείας.

Μας παραδίδονται απο αρχαιους συνγραφεις ενδιαφερουσες λεπτομερειες που ριχνουν φως στην προσωπικοτητα του. Ηταν ενας μετριοφρων, αλλα παιχνιδιαρης, ανθρωπος, η επιτομη του αφηρημενου καθηγητη, εφοσον ηταν τελειως βυθισμενος στις σκεψεις του. Εκεινη την εποχη οι ανθρωποι συνηθιζαν να κανουν λουτρα μακρας διαρκειας και κατοπιν να αλειφουν τον εαυτο τους με λαδι. Μετα το λουτρο ο Αρχιμηδης χανοταν για ωρες σχεδιαζοντας διαγραμματα στο λαδομενο δερμα του. Καποτε οταν η λυση ενος προβληματος στο οποιο εργαζοταν επι μακρον του ηρθε ξαφνικα διεκοψε το λουτρο του και βγηκε τρεχατος στους δρομους γυμνος φωναζοντας : Ευρηκα, ευρηκα!

Ομως το κορυφαιο επισοδειο απο αυτην την αποψη ηταν ο θανατος του. Η μητρικη του πολη αλωνοταν απο τον Ρωμαικο στρατο. Παντου επικρατουσε θανατος και καταστροφη. Αλλα παρολο αυτο το χαος, ο Αρχιμηδης, τωρα υπεργηρος, καθοταν, οπως παντα, μπροστα στα διαγραμματα του σκεπτομενος. Οταν ενας στρατιωτης τον πλησιασε και πατησε πανω στα διαγραμματα του, ο Αρχιμηδης αναφωνησε : Μη μου τους κυκλους ταραττε. Ετσι ο στρατιωτης οργισμενος τον σκοτωσε.

Ερχομαι τωρα στην σφαιρα και τον κυλινδρο. Η σφαιρα ειναι βεβαια η απλουστατη καμπυλη επιφανεια εφοσον ειναι το συνορο του απλουστατου των στερεων. Ομως, παρολον οτι μεγαλοι μαθηματικοι προυπηρξαν του Αρχιμηδη, κανεις δεν μπορεσε να βρει το εμβαδον της επιφανειας της σφαιρας. Στα μαθηματικα, τοτε οπως και τωρα, τα πιο δυσκολα προβληματα ειναι τα απλουστερα τα οποια εχουν αντισταθει την επιλυση επι μακρον. Ο Αρχιμηδης αφιερωσε δυο βιβλια με τιτλο Περι Σφαιρας και Κυλινδρου, Βιβλια 1 και 2 στην γεωμετρια της σφαιρας. Το προτελευταιο θεωρημα του 1ου βιβλιου δινει την λυση σε ενα γενικοτερο προβλημα, την ευρεση του εμβαδου της επιφανειας ενος σφαιρικου τμηματος, που αποκοβεται απο σφαιρα με ενα αυθαιρετο επιπεδο.

[Figure2]

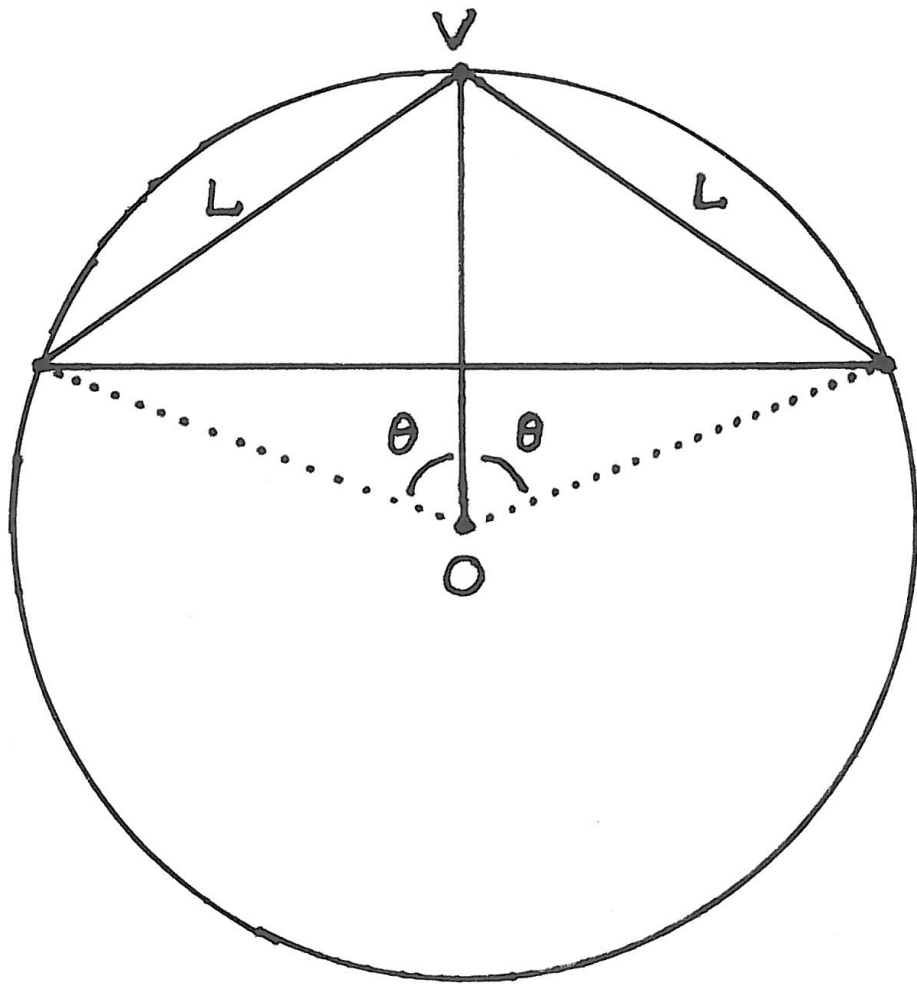


Figure 2

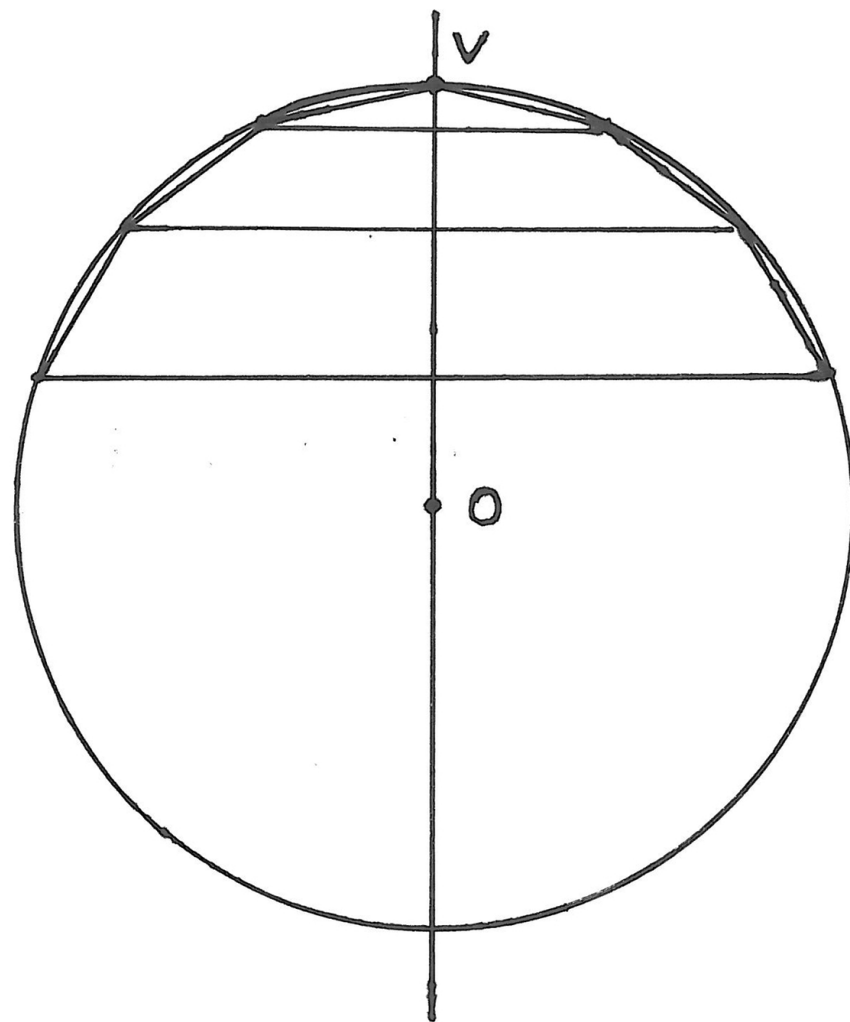


Figure 3

As θεωρησουμε ευθεια απο το κεντρο O της σφαιρας, καθετη προς τον δισκο που αποτελει την βαση του σφαιρικου τμηματος. Αυτη η ευθεια συναντα την σφαιρα στην κορυφη V . Ολα τα σημεια του κυκλου που ειναι το συνορο του δισκου απεχουν την ιδια αποσταση L απο το V . Το θεωρημα του Αρχιμηδη λεει απλα οτι το εμβαδον της επιφανειας του σφαιρικου τμηματος ειναι ισο με εκεινο δισκου ακτινος L . Εαν το τμημα αντιστοιχει σε τομεα γωνιας θ και η ακτινα της σφαιρας ειναι R , εχουμε

$$L = 2R \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

και το εμβαδον δισκου ακτινος L ειναι

$$\pi L^2 = 4\pi R^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = 2\pi R^2 (1 - \cos \theta)$$

επομενως συμφωνα με το θεωρημα :

$$\text{Εμβαδον Σφαιρικου Τμηματος} = 2\pi R^2(1 - \cos \theta)$$

[Figure3]

Θα περιγραψω τωρα πως ο Αρχιμηδης αποδεικνυει αυτο το αποτελεσμα. Θεωρει ενα επιπεδο που περιεχει το ευθυγραμμο τμημα OV . Ενα τετοιο επιπεδο τεμνει την σφαιρα σε εναν κυκλο και τον δισκο που ειναι η βαση του σφαιρικου τμηματος σε ενα ευθυγραμμο τμημα καθετο προς το OV . Το ιχνος του σφαιρικου τμηματος στο εν λογω επιπεδο ειναι το τμημα του κυκλου που αποκοβεται απο το ευθυγραμμο τμημα. Ο Αρχιμηδης ενγραφει σε αυτο το κυκλικο τμημα ενα πολυγωνο με $2n$ ισες πλευρες. Θεωρει τοτε την επιφανεια εκ περιστροφης που γενναται απο το πολυγωνο οταν περιστρεψουμε το επιπεδο γυρω απο τον αξονα OV .

Η επιφάνεια αυτή αποτελείται από κωνικά τμήματα το κάθε ένα από τα οποία παραγεται από την περιστροφή μιας πλευράς του πολυγώνου.

Εχουμε n τέτοια κωνικά τμήματα. Τώρα το εμβαδόν της επιφάνειας ενός κωνικού τμήματος που παραγεται από την περιστροφή ενός ευθυγραμμου τμήματος, έδω μιας πλευράς του πολυγώνου, μήκους s , γυρω από έναν άξονα, έδω τον OV , είναι

$$A = 2\pi s \cdot \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$$

όπου r_1 και r_2 οι αποστάσεις των άκρων του τμήματος από τον άξονα περιστροφής. Έδω για το υπαριθμόν m κωνικό τμήμα, $m = 1, \dots, n$, έχουμε

$$s = 2R \sin\left(\frac{\theta}{2n}\right), \quad r_1 = R \sin\left(\frac{m\theta}{n}\right), \quad r_2 = R \sin\left(\frac{(m-1)\theta}{n}\right)$$

Επομένως η A_m , η επιφάνεια του υπαριθμον m κωνικου τμηματος, είναι :

$$A_m = 2\pi R^2 \cdot 2 \sin \left(\frac{\theta}{2n} \right) \cdot \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{m\theta}{n} \right) + \sin \left(\frac{(m-1)\theta}{n} \right) \right]$$

Ο Αρχιμηδης λοιπον συμπεραίνει οτι το εμβαδον της επιφανειας εκ περιστροφης που γενναται απο το ενγεγραμμενο πολυγωνο είναι :

$$\sum_{m=1}^n A_m = 2\pi R^2 \left(S_n + \sin \left(\frac{\theta}{2n} \right) \sin \theta \right)$$

Τουτο δινει ενα κατω φραγμα για το εμβαδον της επιφανειας του σφαιρικου τμηματος. Εδω S_n είναι η σειρα :

$$S_n = \sum_{m=1}^{n-1} 2 \sin \left(\frac{\theta}{2n} \right) \sin \left(\frac{m\theta}{n} \right)$$

Ο Αρχιμηδης ακολουθως βρισκει την τιμη του S_n γεωμετρικα με εναν ακρως επινοητικο τροπο. [Figure4]

Εστω $P_1, \dots, P_n$ οι κορυφες του πολυγωνου απο την αριστερη πλευρα του V και $P'_1, \dots, P'_n$ οι αντιστοιχες κορυφες απο την δεξια πλευρα του V . Ας καλεσουμε V' το σημειο διαμετρικα αντιθετο με το V . Τα ευθυγραμματα τμηματα $P_1P'_1, \dots, P_nP'_n$ συναντουν την διαμετρο VV' στα σημεια $C_1, \dots, C_n = M$ αντιστοιχως. Ας ενωσουμε το P_1 με το $P'_2, \dots$, το P_{n-1} με το P'_n . Εστω $B_1, \dots, B_{n-1}$ τα σημεια οπου τα $P_1P'_2, \dots, P_{n-1}P'_n$ αντιστοιχως συναντουν την VV' .

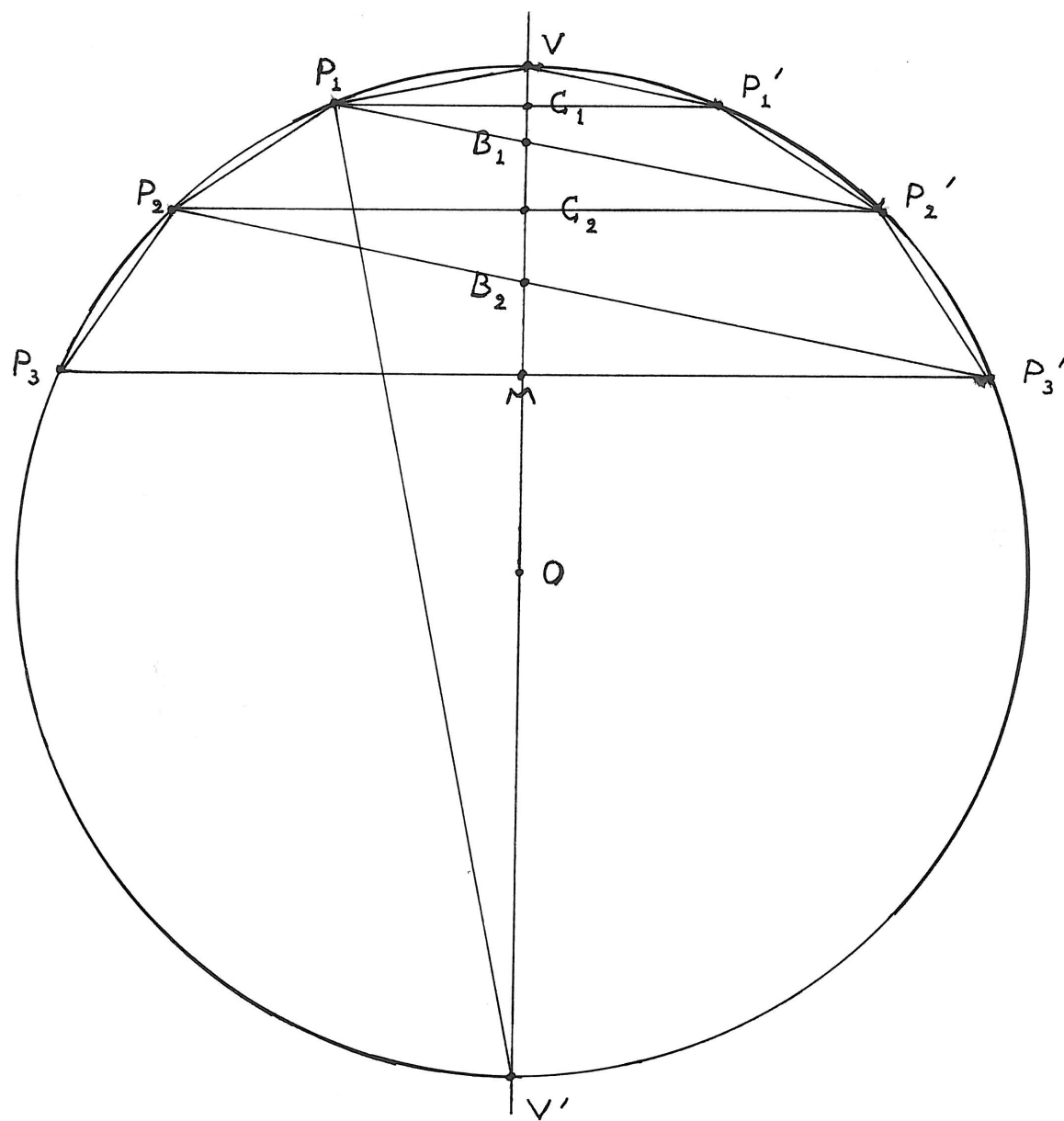


Figure 4

*As θυμηθουμε οτι οι γωνιες που υποτεινουν ισα τοξα
σε διαφορετικα σημεια της περιφερειας ενος κυκλου ειναι ολες ισες.
Επομενως τα ορθογωνια τριγωνα που σχηματιζονται ειναι ολα ομοια.
Αρα οι λογοι των οριζοντιων τμηματων προς τα κατακορυφα ειναι ολοι
ισοι :*

$$\frac{C_1 P'_1}{V C_1} = \frac{P_1 C_1}{C_1 B_1} = \frac{C_2 P'_2}{B_1 C_2} = \frac{P_2 C_2}{C_2 B_2} = \dots = \frac{C_n P'_n}{B_{n-1} C_n}$$

*Επομενως ο λογος του αθροισματος των αριθμητων προς το αθροισμα των
παρονομαστων ειναι επισης ισος. Αλλα εφοσον*

$$P_1 C_1 + C_1 P'_1 = P_1 P'_1, \cdot \cdot \cdot, P_{n-1} C_{n-1} + C_{n-1} P'_{n-1} = P_{n-1} P'_{n-1}$$

το αθροισμα των αριθμητων ειναι :

$$\sum_{m=1}^{n-1} P_m P'_m + C_n P'_n$$

Επισης, εφoσον

$$VC_1 + C_1 B_1 = VB_1, \quad B_1 C_2 + C_2 B_2 = B_1 B_2, \quad \cdot \cdot \cdot, \\ B_{n-2} C_{n-1} + C_{n-1} B_{n-1} = B_{n-2} B_{n-1}$$

το αθροισμα των παρονομαστων ειναι :

$$VB_1 + B_1 B_2 + \cdots + B_{n-2} B_{n-1} + B_{n-1} C_n$$

Αλλα αυτο ειναι απλα : VC_n .

Απο την αλλη μερια η κοινη τιμη του λογου ειναι :

$$\frac{C_1 P'_1}{VC_1} = \frac{P_1 V'}{P_1 V}$$

οπου η τελευταια ισοτητα προκυπτει παλι απο την ομοιοτητα ορθογωνιων τριγωνων. Συμπεραινουμε λοιπον οτι :

$$\frac{\sum_{m=1}^{n-1} P_m P'_m + C_n P'_n}{V C_n} = \frac{P_1 V'}{P_1 V}$$

Εδω έχουμε :

$$P_m P'_m = 2R \sin\left(\frac{m\theta}{n}\right), \quad C_n P'_n = R \sin \theta, \quad V C_n = R(1 - \cos \theta)$$

$$P_1 V' = 2R \cos\left(\frac{\theta}{2n}\right), \quad P_1 V = 2R \sin\left(\frac{\theta}{2n}\right)$$

επομενως το αποτελεσμα μας ισοδυναμει με :

$$\frac{\sum_{m=1}^{n-1} 2 \sin(m\theta/n) + \sin \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{\cos(\theta/2n)}{\sin(\theta/2n)}$$

Ανακαλοντας τον ορισμο του αθροισματος S_n προκυπτει αμεσως η τιμη του S_n που ζητουσαμε :

$$S_n = \cos\left(\frac{\theta}{2n}\right) (1 - \cos \theta) - \sin\left(\frac{\theta}{2n}\right) \sin \theta$$

Προχωρώντας στην αποδειξη, ο Αρχιμήδης εξετάζει το όριο $n \rightarrow \infty$.

Εφόσον :

$$\sin\left(\frac{\theta}{2n}\right) \rightarrow 0, \quad \cos\left(\frac{\theta}{2n}\right) \rightarrow 1$$

συμπεραινουμε οτι :

$$S_n \rightarrow 1 - \cos \theta$$

επομενως :

$$\sum_{m=1}^n A_m \rightarrow 2\pi R^2(1 - \cos \theta)$$

Αυτο ειναι λοιπον το εμβαδον του σφαιρικου τμηματος και το θεωρημα αποδεικτηκε.

Στην παραπάνω περιγραφή απλοποίησα λίγο τα πράγματα. Ο συλλογισμός του Αρχιμήδη έχει απολυτή αυστηρότητα. Γιατί θεωρεί επίσης το αντιστοιχό περιγεγραμμένο πολυγώνο του οποίου οι πλευρές είναι παράλληλες προς εκείνες του εγγεγραμμένου. Το εμβαδόν της επιφάνειας εκ περιστροφής που παραγεται από το περιγεγραμμένο πολυγώνο, το οποίο βρίσκεται κατά παρόμοιο τρόπο, δίνει ένα άνω φράγμα για το εμβαδόν του σφαιρικού τμήματος. Επιπλέον, εξετάζοντας διαφορετικές τιμές του n , δείχνει ότι κάθε άνω φράγμα υπερέχει από κάθε κάτω φράγμα, ότι η ακολουθία των άνω φραγμών είναι φθίνουσα ενώ η ακολουθία των κάτω φραγμών είναι αυξουσά, και ότι η διαφορά μεταξύ των δύο φραγμών που αντιστοιχούν στην ίδια τιμή του n τείνει στο μηδέν όταν το n τείνει στο άπειρο. Και αυτό κλειδώνει την απόδειξη.

As παρατηρήσουμε ότι το άθροισμα S_n παριστάνει στο όριο $n \rightarrow \infty$ αυτό που σήμερα συμβολίζουμε με το ολοκλήρωμα :

$$\int_0^\theta \sin \theta' d\theta'$$

επομένως το αποτέλεσμα του Αρχιμήδη που αναφέραμε πιο πάνω είναι ισοδύναμο με τον τύπο :

$$\int_0^\theta \sin \theta' d\theta' = 1 - \cos \theta$$

Τα έργα του Αρχιμήδη περιέχουν έναν μεγάλο αριθμό θεωρημάτων για εμβαδά χωρίων του επιπέδου, όγκους στερεών, εμβαδά επιφανειών που αποτελούν σύνορα στερεών, και κέντρα βάρους επιπέδων χωρίων και στερεών. Σε όλα αυτά τα θεωρήματα εισαγει μεθόδους που προιδεάζουν εκείνες του ολοκληρωτικού λογισμού κατά σχεδόν δυο χιλιετίες.

Ερχομαι τέλος στο εντυπωσιακότερο έργο του Αρχιμήδη, την υδροστατική του, Περι Οχουμένων Βιβλία 1 και 2. Ο Αρχιμήδης ήταν ο πρώτος που επέκτεινε το πεδίο εφαρμογής των μαθηματικών στον φυσικό κόσμο, πέραν της γεωμετρίας. Ίδρυσε τα πεδία της οπτικής, μηχανικής και υδροστατικής. Ας σκεφτούμε τι σημαίνει αυτό. Σημαίνει ότι για κάθε ένα από τα τρία αυτά πεδία, μόνος έκανε τις απαιτούμενες παρατηρήσεις και πειράματα, βρήκε κατ' αυτόν τον τρόπο εμπειρικούς κανόνες, μετά ανακάλυψε τις βασικές έννοιες και αρχές που τους συνδέουν, και ορθωσε θεωρία πάνω σε αξιωματική βάση. Οτι χρειάστηκε χιλιετίες στην περίπτωση της γεωμετρίας, συντελεστήκε σε μια ζωή από έναν άνθρωπο.

Στην μηχανική, εισηγάγε την έννοια της δύναμews όχι μονον ως ανυσματικης ποσοτητας, αλλα να δρα κατα μηκος μιας γραμμης. Μια δυναμη λοιπον για τον Αρχιμηδη ειναι μια προσανατολισμενη γραμμη με μεγαθος, το μεγαθος της δυναμews. Εισηγάγε επισης τη έννοια της ροπης. Ο ορισμος χρειαζεται ενα σημειο αναφοράς το οποιο καλουμε αρχη. Η ροπη η οποια παραγεται απο μια δυναμη, ως προς μια δεδομενη αρχη, ειναι μια ανυσματικη ποσοτητα το μεγαθος της οποιας ειναι ισο προς το γινόμενο του μεγαθους της δυναμews με τη αποσταση της γραμμης της δυναμews απο την αρχη, και η διευθυνση της οποιας ειναι καθετη προς το επιπεδο που περιεχει την γραμμη αυτη και την αρχη.

Οι συνθήκες ισορροπίας είναι ότι το άθροισμα των δυνάμεων μηδενίζεται και το άθροισμα των ροπών ως προς μια δεδομένη αρχή επίσης μηδενίζεται. Όταν η πρώτη συνθήκη ικανοποιείται, το άθροισμα των ροπών είναι ανεξάρτητο από την επιλογή της αρχής. Έχουμε ευσταθή ισορροπία εάν κάθε αλλαγή θέσεως από εκείνη της ισορροπίας έχει σαν αποτέλεσμα την δημιουργία συνολικής δύναμews και συνολικής ροπης που τείνουν να επαναφέρουν την αρχική θέση.

Στην υδροστατική, όταν έχουμε ένα στερεό εν μέρει βυθισμένο σε ένα υγρό, η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού οντας ένα οριζόντιο επίπεδο, δύο δυνάμεις εξασκούνται στο στερεό. Το βάρος του, που δρα προς τα κάτω κατά μήκος μιας κατακόρυφης γραμμής που διέρχεται από το κέντρο βάρους του στερεού, και την ανώση που δρα προς τα πάνω κατά μήκος μιας κατακόρυφης γραμμής που διέρχεται από το κέντρο βάρους του βυθισμένου τμήματος του στερεού και έχει μέγεθος ίσο με το βάρος του εκτοπισμένου υγρού.

Αλλά ο Αρχιμήδης δεν σταμάτησε με την θεμελίωση θεωριών. Προχώρησε στην πλήρη ανάπτυξη των θεωριών που θεμελίωσε λύνοντας τα πιο δύσκολα προβλήματα που προκύπτουν στις θεωρίες αυτές. Οι λύσεις αυτών των προβλημάτων περιγράφουν φαινόμενα που παρατηρούνται στον φυσικό κόσμο. Το πιο εντυπωσιακό έργο του Αρχιμήδη είναι το 2ο βιβλίο των Οχουμενων, το οποίο μελετά με κάθε λεπτομέρεια τις θέσεις ισορροπίας και την ευσταθεία τους ενός στερεού δεδομένης πυκνότητας σχήματος παραβολοειδούς εκ περιστροφής κομμένου από ένα επίπεδο κάθετο προς τον άξονα, που επιπλέει σε ένα υγρό υψηλότερης πυκνότητας. Περιέχει 10 θεωρήματα. Θα δώσω τις εκφωνήσεις των θεωρημάτων 2, 4 και 8 ώστε να μπορέσουμε να πάρουμε μια ιδέα του επιστημονικού επιπέδου.

Συμβολίζουμε με σ την πυκνότητα του στερεού και με ρ την πυκνότητα του υγρού. Υποθέτουμε ότι $\sigma < \rho$, ώστε το στερεό να μπορεί να επιπλέει στο υγρό. Επίσης συμβολίζουμε με h το υψος του παραβολικού τμήματος και a την ακτίνα του κύκλου που αποτελεί την βάση του τμήματος.

Εστω p το μήκος

$$p = \frac{a^2}{h}$$

Το p είναι η παραμετρος της παραβολής που παραγει το παραβολικό τμήμα.

Το Θεώρημα 2 λέει ότι :

Εάν $h \leq \frac{3}{4}p$ και το στερεό τοποθετηθεί στο υγρό με τον άξονα του κεκλιμένο κατά οποιαδήποτε γωνία με την κατακορυφή, αλλά έτσι ώστε η βάση να μην αγγίζει την επιφάνεια του υγρού, το στερεό δεν θα παραμείνει σε αυτήν την θέση αλλά θα επανέλθει στην θέση όπου ο άξονας του είναι κατακορυφός.

[Figure5]

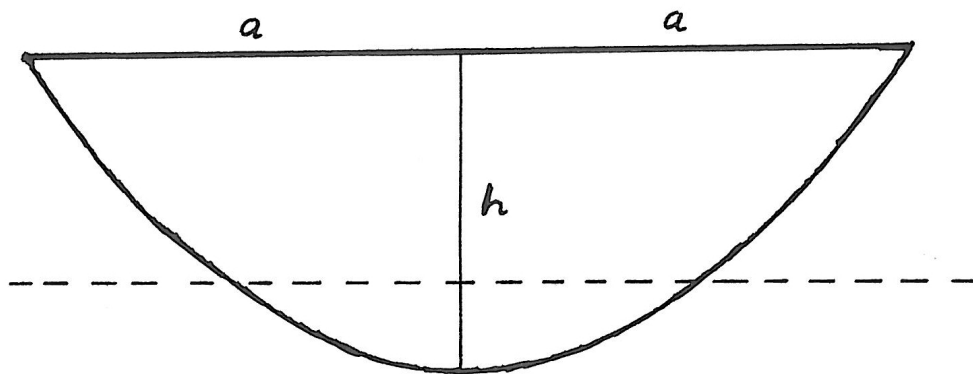


Figure 5

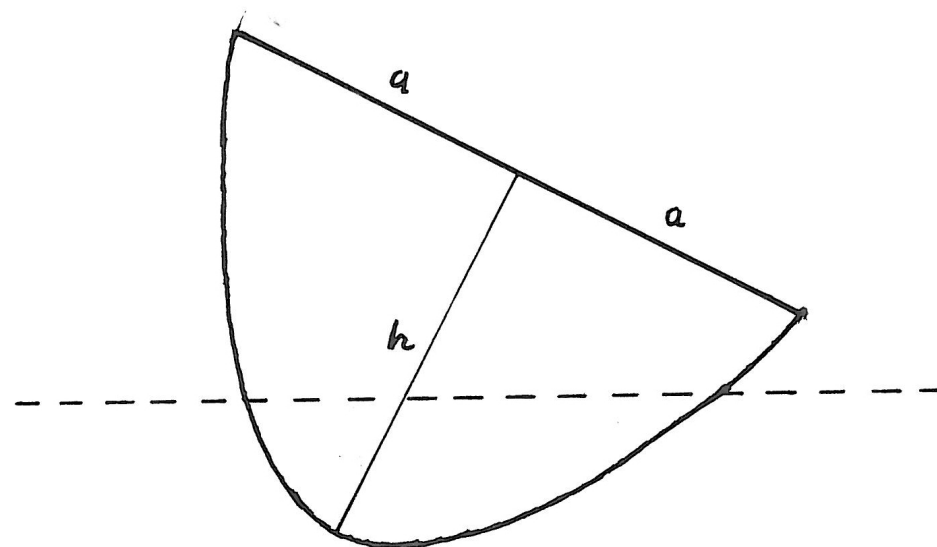


Figure 6

Το Θεωρημα 4 λειει οτι :

Εαν $h > \frac{3}{4}p$ και $\frac{\sigma}{\rho} \geq \frac{\left(h - \frac{3}{4}p\right)^2}{h^2}$ το ιδιο συμπερασμα ισχυει.

Απο την αλλη μερια, το Θεωρημα 8 λειει οτι :

Εαν $h > \frac{3}{4}p$ αλλα $h < \frac{15}{8}p$ και $\frac{\sigma}{\rho} < \frac{\left(h - \frac{3}{4}p\right)^2}{h^2}$

και το στερεο τοποθετηθει στο υγρο με τον αξονα του κεκλιμενο κατα οποιαδηποτε γωνια με την κατακορυφο, αλλα ετσι ωστε η βαση να μην αγγιζει την επιφανεια του υγρου, το στερεο δεν θα επανελθει στην θεση με τον αξονα κατακορυφο και δεν θα μεινει σε οποιαδηποτε θεση εκτος απο εκεινη οπου ο αξονας σχηματιζει με την κατακορυφο μια συγκεκριμενη γωνια. [Figure6]

Το τελευταίο θεώρημα, Θεώρημα 10, αφορά την περίπτωση που απομένει δηλαδή $h \geq \frac{15}{8}p$ και $\frac{\sigma}{\rho} < \frac{\left(h - \frac{3}{4}p\right)^2}{h^2}$, η οποία είναι η πιο πολυπλοκή.

Συνοψίζοντας, ο Αρχιμήδης ταξίδεψε μόνος όλη την πορεία από παρατηρήσεις και πειράματα, εμπειρικούς κανόνες, επινοήση καταλλήλων εννοιών, ανακάλυψη των βασικών αρχών και θεμελίωση θεωριών, ανάπτυξη μαθηματικών μεθόδων για την επίλυση των προβλημάτων που προκύπτουν στις θεωρίες, και τέλος την λύση αυτών των προβλημάτων καταληγώντας στην ποσοτική περιγραφή των φυσικών φαινομένων. Το σύνολο αποτελεί κατορθώμα δίχως παραλληλό στην ιστορία της ανθρωπότητας.